TOETS FOUTENANALYSE 25 oktober 2010 09:00 - 11:00 uur

cijfer = Σ punten / 2 + 1

Vermeld op elk vel papier je **naam** en **studentnummer**

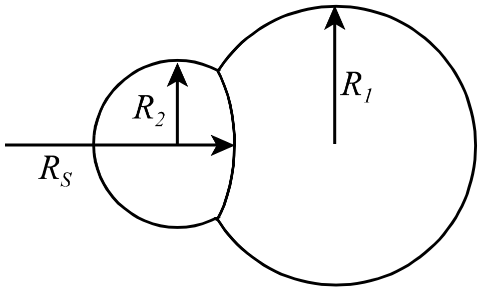
Geef steeds grootheden met hun fouten op een correcte wijze afgerond weer en laat duidelijk zien welke formules je gebruikt bij de berekeningen.

1. Eenheden

Voor een bolvormige zeepbel geldt dat de overdruk Δp (dat is het verschil van de druk in de zeepbel ten opzichte van de luchtdruk buiten de zeepbel) alleen afhangt van de oppervlaktespanning σ van de zeepoplossing en de straal R van de zeepbel. De eenheid van de oppervlaktespanning σ is Nm^{-1}.

[1] a. Leidt met behulp van eenheden het verband af tussen de overdruk Δp en de straal R van de zeepbel.

Als twee zeepbellen met straal R_1 en R_2 elkaar raken is het raakvlak een bolsegment met een straal R_S.



[2] b. Leidt de relatie af tussen de straal R_S van het bolsegment en de stralen R_1 en R_2 .

2. Verdelingsfunctie

Gegeven is de functie $F(x) = A.\sin^2 x$ op het interval $[0,\pi]$.

[2] a. Bereken de waarde van A zodat $F(x)$ een verdelingsfunctie wordt.

[1] b. Bereken de gemiddelde waarde μ van x op het interval $[0,\pi]$.

[2] c. Bereken de standaarddeviatie σ op het interval $[0,\pi]$.

Maak eventueel gebruik van de volgende standaardintegralen:

$$\int \sin^2 x.dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) \ ; \int x.\sin^2 x.dx = \frac{1}{4}[x^2 - x.\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)] \ ;$$

$$\int x^2.\sin^2 x.dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2.\sin(2x) - \frac{1}{4}x.\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x)$$

3. Doorwerken van fouten / gewogen gemiddelde

De brandpuntsafstand f van een dunne lens wordt bepaald met de formule: $f = \dfrac{R^2}{2d(n-1)}$.

Hierin is $R = (2{,}21 \pm 0{,}05)\,cm$ de straal van de lens; $d = (0{,}6 \pm 0{,}05)\,cm$ de dikte van de lens en $n = 1{,}501$ (geen fout) de brekingsindex van het materiaal waar de lens van gemaakt is.

[2] a. Bereken de waarde van f met de fout.

Een tweede meting levert als waarde voor de brandpuntsafstand: $f_2 = (7{,}9 \pm 0{,}6)\,cm$

[3] b. Bereken het gewogen gemiddelde met de fout van beide waarden van de brandpuntsafstand.

4. Kleinst-kwadraten methode

Het aantal aardbevingen per jaar over de hele wereld hangt af van de sterkte van de beving, de zogenaamde magnitude (gemeten op de schaal van Richter). In de tabel staat het aantal bevingen per jaar voor enkele magnituden. Nu blijkt dat er een lineair verband bestaat tussen de logaritme van het aantal bevingen per jaar en de magnitude, zodat dus geldt: $\ln(N) = a.m + b$

Magnitude m	aantal bevingen per jaar N
5	3000
6	100
7	20
8	2

[4] a. Laat met behulp van de kleinst-kwadraten-methode zien dat $a = \dfrac{<m.\ln(N)> - <m>.<\ln(N)>}{<m^2> - <m>^2}$

[1] b. Bereken de waarde van a.

Uitwerkingen

1a. $[\Delta p] = Nm^{-2}$ zodat uit de eenheid voor de oppervlaktespanning volgt: $\Delta p = \dfrac{\sigma}{R}$

b. Voor het raakvlak geldt: $\dfrac{\sigma}{R_S} = \Delta p_2 - \Delta p_1 = \dfrac{\sigma}{R_2} - \dfrac{\sigma}{R_1}$ zodat $\dfrac{1}{R_S} = \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}$

2a. $1 = \int F(x)\,dx = A.\int \sin^2 x.dx = A.\left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = A.\dfrac{\pi}{2}$ zodat $A = \dfrac{2}{\pi}$

b. De verdelingsfunctie is symmetrisch: dus $\mu = \dfrac{\pi}{2}$. Dit kan ook berekend worden uit:

$$\mu = \frac{2}{\pi}.\int x.\sin^2 x.dx = \frac{1}{2\pi}\left[x^2 - x.\sin(2x) - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}[(\pi^2] = \frac{\pi}{2}$$

c. $\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \mu^2$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{\pi}\int x^2.\sin^2 x.dx = \frac{2}{\pi}\left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2.\sin(2x) - \tfrac{1}{4}x.\cos(2x) + \tfrac{1}{8}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

zodat $\sigma = \sqrt{\langle x^2\rangle - \mu^2} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{3} - \dfrac{\pi^2}{4}} = \dfrac{\pi}{3{,}464} = 0{,}9$

3a. $f = \dfrac{R^2}{2d(n-1)} = 8{,}12\,cm$

$\dfrac{\sigma_f}{f} = \sqrt{4.\left(\dfrac{0{,}05}{2{,}21}\right)^2 + \left(\dfrac{0{,}05}{0{,}60}\right)^2} = 0{,}095$ zodat $\sigma_f = 0{,}8\,cm$

b. $\langle f\rangle = \dfrac{\dfrac{f}{\sigma_f^2} + \dfrac{f_1}{\sigma_{f_2}^2}}{\dfrac{1}{\sigma_f^2} + \dfrac{1}{\sigma_{f_2}^2}} = 7{,}98\,cm$ met $\sigma_{\langle f\rangle} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sigma_f^2} + \dfrac{1}{\sigma_{f_2}^2}} = 0{,}5\,cm$ zodat $\langle f\rangle = 8{,}0 \pm 0{,}5\,cm$

4a. $M(a,b) = \sum_1^4 [\ln(N_i) - (a.m_i + b)]^2$

Uit $\dfrac{\partial M(a,b)}{\partial a} = 0$ volgt: $0 = -2\sum_1^4 [\ln(N_i) - (a.m_i + b)].m_i$

zodat: $\sum_1^4 \ln(N_i).m_i = a.\sum_1^4 (m_i)^2 + b.\sum_1^4 m_i$ (1)

Uit $\dfrac{\partial M(a,b)}{\partial b} = 0$ volgt: $0 = -2\sum_1^4 [\ln(N_i) - (a.m_i + b)]$

zodat: $\sum_1^4 \ln(N_i) = a.\sum_1^4 (m_i) + b.4$ (2)

Uit (1) en (2) volgt: $a = \dfrac{\langle m.\ln(N)\rangle - \langle m\rangle.\langle\ln(N)\rangle}{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2}$

b. $a = \dfrac{\langle m.\ln(N)\rangle - \langle m\rangle.\langle\ln(N)\rangle}{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2} = -2{,}35$